

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 - i$. Arătați că $z(z + 2i) = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(-2a) = a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 7} = 2\sqrt{x + 1}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$. Determinați câte dintre submulțimile mulțimii A au exact trei elemente și conțin numărul 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 6)$, $B(4, 1)$ și $C(5, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele OA și BC sunt paralele.
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin \frac{x}{2} + \cos 3x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 3 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + ay + az = 1 \\ ax + 3y + az = 0, \\ 2y + z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că, pentru orice număr real a , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul a pentru care sistemul de ecuații are soluția (x_0, y_0, z_0) , cu $z_0 = nx_0$, unde n este număr natural.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{2}{3}(x - 3)(y - 3) + 3$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 2 = 5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * \frac{3x}{2} = 5x$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m * m * n = -1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 20)}{(x^2 + 5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții.
2. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x \ln x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_2^3 f(x) x \ln x dx = \frac{7}{3}$.

- 5p** b) Arătați că $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} dx = \ln 2$.
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{F^2(x)} \int_2^x (t-2)F(t) dt = \frac{\ln 2}{4}$, unde $F: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(2) = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z(z+2i) = (3-i)(3+i) = 9 - i^2 =$ $= 9 - (-1) = 10$	2p 3p
2.	$f(a) = 3a - 4$, $f(-2a) = -6a - 4$, pentru orice număr real a $3a - 4 - 6a - 4 = a$, de unde obținem $a = -2$	3p 2p
3.	$x^2 + 7 = 4(x+1)$, de unde obținem $x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$, care convin	2p 3p
4.	Numărul submulțimilor cu exact trei elemente ale mulțimii A , care conțin elementul 5, este egal cu numărul submulțimilor cu exact două elemente ale mulțimii $A \setminus \{5\}$ Mulțimea $A \setminus \{5\}$ are 6 submulțimi cu exact două elemente	3p 2p
5.	$m_{OA} = 2$ $m_{BC} = a - 1$ și, cum $m_{OA} = m_{BC}$, obținem $a = 3$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \pi = -1$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + (\sqrt{3})^2\right) \cdot \frac{1}{2} + (-1) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 3 + 2 + 0 - 0 - 2 - 1 = 2$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 3 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 3$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = (a-1)^2 + 2 \neq 0$, pentru orice număr real a , deci pentru orice număr real a sistemul de ecuații are soluție unică	3p 2p
c)	$2a = n(3-2a)$, unde a și n sunt numere naturale, a nenul $3-2a > 0$ și, cum a este număr natural nenul, obținem $a = 1$, care convine	3p 2p
2.a)	$0 * 2 = \frac{2}{3}(0-3)(2-3) + 3 =$ $= 2 + 3 = 5$	3p 2p
b)	$x * \frac{3x}{2} = x^2 - 5x + 9$, pentru orice număr real x $x^2 - 5x + 9 = 5x$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 9$	2p 3p

c)	$m * m = \frac{2}{3}(m-3)^2 + 3, m * m * n = \frac{4}{9}(m-3)^2(n-3) + 3$, pentru orice numere naturale m și n	2p
	$\frac{4}{9}(m-3)^2(n-3) + 3 = -1 \Leftrightarrow (m-3)^2(n-3) = -9$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,2)$ și $(6,2)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4)(x^2 + 5) - (x^3 - 4x) \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2} =$	3p
	$= \frac{x^4 + 19x^2 - 20}{(x^2 + 5)^2} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 20)}{(x^2 + 5)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x}{x^2 + 5} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ sau $x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1)$, pentru orice $x \in (-1, 1)$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-1, 1)$ și, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(-1) = \frac{1}{2}, f(1) = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, de unde obținem că ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții dacă și numai dacă $m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	3p
2.a)	$\int_2^3 f(x) x \ln x dx = \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big _2^3 =$	3p
	$= -3 + \frac{16}{3} = \frac{7}{3}$	2p
b)	$\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' dx = \ln(\ln x) \Big _e^{e^2} =$	3p
	$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{F^2(x)} \int_2^x (t-2) F(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\int_2^x (t-2) F(t) dt \right)'}{(F^2(x))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) F(x)}{2F(x) f(x)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \ln x}{2(x+2)} = \frac{\ln 2}{4}$	2p