

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $2 \cdot (1,1+0,3) - 1,8 = 1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 4$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = a \cdot f(0)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+x-1}$ .
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea  $n^3 > 10$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,4)$ ,  $B(2,0)$  și  $C(8,2)$ . Determinați distanța dintre punctul  $A$  și mijlocul segmentului  $BC$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 10$  și  $\sin B = \frac{2}{5}$ . Arătați că  $AC = 4$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} 2+2x & x \\ -x & 2-2x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$ .
- 5p** c) Determinați numărul întreg nenul  $m$  pentru care matricea  $B(m) = \frac{1}{m} A(-m)$  este inversa matricei  $A(m)$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 3X^2 - 3X + a$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Pentru  $a = 1$ , arătați că  $f(-1) = 0$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_1x_2x_3 = 3$ , unde  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p** c) Pentru  $a = 9$ , determinați rădăcinile polinomului  $f$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 8}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$ , pentru orice  $x \in [-3, 4]$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6x + \frac{2 \ln x}{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_2^3 \left( f(x) - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = 15$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_1^e (f(x) - 6x) dx = 1$ .

---

|           |                                                                                                                       |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>5p</b> | c) Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_1^{e^2} \left( \frac{f(x)}{x} + f'(x) \ln x \right) dx = af(e^2)$ . |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

---

**Examenul național de bacalaureat 2025**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianța 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                  |                        |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.</b> | $2 \cdot (1,1 + 0,3) - 1,8 = 2 \cdot 1,4 - 1,8 =$<br>$= 2,8 - 1,8 = 1$                                                                                                                                                                                           | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.</b> | $f(0) = 4$ , $f(a) = 2a + 4$ , pentru orice număr real $a$<br>$2a + 4 = 4a$ , de unde obținem $a = 2$                                                                                                                                                            | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>3.</b> | $2 - x = x^2 + x - 1$ , de unde obținem $x^2 + 2x - 3 = 0$<br>$x = -3$ sau $x = 1$ , care convin                                                                                                                                                                 | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>4.</b> | Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile<br>În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 7 numere $n$ care verifică inegalitatea<br>$n^3 > 10$ , deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{7}{10}$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>5.</b> | $M(5,1)$ , unde punctul $M$ este mijlocul segmentului $BC$<br>$AM = 5$                                                                                                                                                                                           | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>6.</b> | $\sin B = \frac{AC}{BC}$ , deci $\frac{2}{5} = \frac{AC}{10}$<br>$AC = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$                                                                                                                                                                 | <b>3p</b><br><b>2p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $A(1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) =$<br>$= 0 + 1 = 1$                                                                                                                 | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $A(2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ , $A(2) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$<br>Cum $A(-2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ , obținem $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I_2$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $B(m)$ este inversa matricei $A(m) \Leftrightarrow A(m) \cdot B(m) = B(m) \cdot A(m) = I_2 \Leftrightarrow \frac{4-3m^2}{m} I_2 = I_2$<br>$\frac{4-3m^2}{m} = 1$ , de unde obținem $m = -\frac{4}{3}$ , care nu convine, sau $m = 1$ , care convine                                         | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.a)</b> | $f = X^3 - 3X^2 - 3X + 1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 =$<br>$= -1 - 3 + 3 + 1 = 0$                                                                                                                                                                        | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ , $x_1 x_2 x_3 = -a \Rightarrow 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_1 x_2 x_3 = 9 + a$ , pentru orice număr real $a$<br>$9 + a = 3$ , de unde obținem $a = -6$                                                                                                                     | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $f = X^3 - 3X^2 - 3X + 9 = (X - 3)(X^2 - 3)$<br>Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = 3$ , $x_2 = -\sqrt{3}$ și $x_3 = \sqrt{3}$                                                                                                                                                               | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                   |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 - 8)e^x}{(e^x)^2} =$ $= \frac{-x^2 + 2x + 8}{e^x} = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                        | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |
| <b>b)</b>   | $f(0) = -8, \quad f'(0) = 8$<br>Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = 8x - 8$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <b>c)</b>   | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 4$ ; pentru orice $x \in [-3, -2]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[-3, -2]$ și, pentru orice $x \in [-2, 4]$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[-2, 4]$<br>$f(-3) = e^3$ , $f(-2) = -4e^2$ și $f(4) = \frac{8}{e^4} < e^3$ , de unde obținem $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$ , pentru orice $x \in [-3, 4]$ | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |
| <b>2.a)</b> | $\int_2^3 \left( f(x) - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = \int_2^3 6x dx = 3x^2 \Big _2^3 =$ $= 27 - 12 = 15$                                                                                                                                                                                                                                                                             | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |
| <b>b)</b>   | $\int_1^e (f(x) - 6x) dx = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = \int_1^e 2 \ln x (\ln x)' dx = \ln^2 x \Big _1^e =$ $= \ln^2 e - \ln^2 1 = 1$                                                                                                                                                                                                                                               | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |
| <b>c)</b>   | $\int_1^{e^2} \left( \frac{f(x)}{x} + f'(x) \ln x \right) dx = \int_1^{e^2} (f(x) \ln x)' dx = f(x) \ln x \Big _1^{e^2} = f(e^2) \ln e^2 = 2f(e^2)$ $2f(e^2) = af(e^2) \text{ și, cum } f(e^2) \neq 0, \text{ obținem } a = 2$                                                                                                                                                         | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |