

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 5$ și $a_3 = 35$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) = f(0) \cdot f(1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{3x - 6}$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 < 100$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(2, 5)$ și C , astfel încât B este mijlocul segmentului AC . Determinați coordonatele punctului C .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = AC$ și aria egală cu 18. Arătați că $BC = 6\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 3x \\ -x & 1+4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Arătați că $xA(y) - A(xy) = (x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $A(1) \cdot A(x-1) = xA(x)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{1}{4}(x+1)(y+1) - 1$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 5 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \leq n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1 + \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x}{\ln x} = 3$.
- 5p c) Demonstrați că $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$, pentru orice $x \in (0, 1]$ și orice $y \in [1, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_2^4 f(x) \sqrt{x} dx = 4$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^4 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

-
- 5p** c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi \ln(4e)$.

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{5 + 35}{2} =$ $= \frac{40}{2} = 20$	3p 2p
2.	$f(0) = 3, f(1) = 5, f(m) = 2m + 3$, pentru orice număr real m $2m + 3 = 3 \cdot 5$, de unde obținem $m = 6$	3p 2p
3.	$x^2 - 4 = 3x - 6$, de unde obținem $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 6 numere n pentru care $3n^2 < 100$, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	2p 3p
5.	$2 = \frac{0 + x_C}{2}$ și $5 = \frac{2 + y_C}{2}$ $C(4, 8)$	3p 2p
6.	$18 = \frac{AB \cdot AC}{2}$, deci $AB = AC = 6$ $BC^2 = 72$, de unde obținem $BC = 6\sqrt{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 9 - 6 \cdot (-2) =$ $= -9 + 12 = 3$	3p 2p
b)	$xA(y) - A(xy) = \begin{pmatrix} x - xy & 3xy \\ -xy & x + 4xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - xy & 3xy \\ -xy & 1 + 4xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 & 0 \\ 0 & x - 1 \end{pmatrix} =$ $= (x - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x - 1)I_2$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(1) \cdot A(x - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - x & 3x - 3 \\ -x + 1 & 4x - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3x & 12x - 9 \\ 3 - 4x & 17x - 12 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 3 - 3x & 12x - 9 \\ 3 - 4x & 17x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 & 3x^2 \\ -x^2 & 4x^2 + x \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 3$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 5 = \frac{1}{4}(1 + 1)(5 + 1) - 1 =$ $= 3 - 1 = 2$	3p 2p

b)	$x \circ 3 = \frac{1}{4}(x+1)(3+1) - 1 = x + 1 - 1 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$3 \circ x = \frac{1}{4}(3+1)(x+1) - 1 = x + 1 - 1 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	3p
c)	$\frac{1}{4}(m+1)(n+1) - 1 = 3 \Leftrightarrow (m+1)(n+1) = 16$	2p
	Cum m și n sunt numere naturale, cu $m \leq n$, obținem perechile $(0,15)$, $(1,7)$ și $(3,3)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} =$	3p
	$= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(\ln x)'} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$; pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ și, pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, 2]$	3p
	Pentru orice $x \in (0, 1]$ și orice $y \in [1, 2]$, rezultă $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ și $f(y) \leq f(2)$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4} - \ln 2$ și $f(2) = -3 + \ln 2$, obținem $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$	2p
2.a)	$\int_2^4 f(x) \sqrt{x} dx = \int_2^4 (x-1) dx = \frac{x^2}{2} \Big _2^4 - x \Big _2^4 =$	3p
	$= 6 - 2 = 4$	2p
b)	$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \Big _1^4 - 2\sqrt{x} \Big _1^4 =$	3p
	$= \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$	2p
c)	$g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{x-1}, x \in [2, 3]$, deci $V = \pi \int_2^3 (g(x))^2 dx = 2\pi \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx =$	2p
	$= 2\pi \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = 2\pi \left(\ln(x-1) \Big _2^3 - \frac{1}{x-1} \Big _2^3\right) = \pi \ln(4e)$	3p