

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2(\log_5 10 - \log_5 2) + \log_5 25 = 4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$. Determinați numărul real m pentru care $f(2+m) = 2-m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x \cdot 2^{1-x} = 2^7$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea A , sunt divizibile cu 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,0)$ și $C(4,6)$. Determinați ecuația dreptei d ce trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \operatorname{tg} x \cdot \left(\cos \frac{3x}{4}\right)^2 - \cos \frac{x}{2}$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 4 \\ ay + z = 1 \\ 2x + 4y + z = 4 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p** b) Arătați că sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații verifică inegalitatea $y_0 \geq 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4 - \frac{1}{2}(x-4)(y-4)$.
- 5p** a) Arătați că $6 * 7 = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x * (x+4) = 6$.
- 5p** c) Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu $m < n < p$, pentru care $m * n * p = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-5)\sqrt{x^2+2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5x}{f(x)}\right)^x = 1$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 1 + \ln^2 x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln^2 x) dx = 31$.

-
- | | |
|-----------|--|
| 5p | b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x) - 8x^3 - 1}{x} dx = \frac{1}{3}$. |
| 5p | c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^n}{f(x) - 8x^3} dx$. Demonstrați că $I_{n+2} + I_n \leq 2^{n-1}(e^4 - 1)$, pentru orice număr natural nenul n . |

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(\log_5 10 - \log_5 2) + \log_5 25 = 2\log_5 5 + \log_5 5^2 =$ $= 2 \cdot 1 + 2 = 4$	3p 2p
2.	$f(2+m) = m-2$, pentru orice număr real m $m-2 = 2-m$, de unde obținem $m = 2$	2p 3p
3.	$2^{2x+1} = 2^7$, de unde obținem $2x+1 = 7$ $x = 3$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege într-un singur mod Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci sunt $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$ de numere	2p 3p
5.	$m_{BC} = 3$, deci $m_d = 3$ Ecuația dreptei d este $y-1 = 3(x-0)$, adică $y = 3x+1$	3p 2p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 2 + 4 - 4 - 0 = 3$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2$, pentru orice număr real a $a^2 + 2 \neq 0$, pentru orice număr real a , deci sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	$y_0 = \frac{12-3a}{a^2+2}$, pentru orice număr real a $\frac{12-3a}{a^2+2} \geq 1$, de unde obținem $a \in [-5, 2]$	3p 2p
2.a)	$6 * 7 = 4 - \frac{1}{2}(6-4)(7-4) =$ $= 4 - 3 = 1$	3p 2p

b)	$x * (x + 4) = 4 - \frac{1}{2}(x - 4)x$, pentru orice număr real x	2p
	$4 - \frac{1}{2}(x - 4)x = 6$, de unde obținem $x = 2$	3p
c)	$m * n * p = 4 + \frac{1}{4}(m - 4)(n - 4)(p - 4)$, pentru orice numere naturale m, n și p	3p
	$4 + \frac{1}{4}(m - 4)(n - 4)(p - 4) = 3 \Leftrightarrow (m - 4)(n - 4)(p - 4) = -4$ și, cum m, n și p sunt numere naturale cu $m < n < p$, obținem tripletele $(2, 5, 6)$ și $(3, 5, 8)$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + (x - 5) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} =$	3p
	$= \frac{x^2 + 2 + x^2 - 5x}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = 2$	2p
	Pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ și, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{f(x)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 2} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{2}{x^2 + 2} \right)^{-\frac{x^2 + 2}{2}} \right)^{-\frac{x}{x^2 + 2}} =$	3p
	$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x^2 + 2}} = e^0 = 1$	2p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - \ln^2 x) dx = \int_1^2 (8x^3 + 1) dx = \left(2x^4 + x \right) \Big _1^2 =$	3p
	$= 34 - 3 = 31$	2p
b)	$\int_1^e \frac{f(x) - 8x^3 - 1}{x} dx = \int_1^e \ln^2 x \cdot (\ln x)' dx = \frac{\ln^3 x}{3} \Big _1^e =$	3p
	$= \frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}$	2p
c)	$I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^n}{1 + \ln^2 x} dx, \quad I_{n+2} + I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^{n+2} + x(\ln x)^n}{1 + \ln^2 x} dx = \int_1^{e^2} x(\ln x)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	3p
	Pentru orice $x \in [1, e^2]$, $\ln x \leq 2$, de unde obținem $I_{n+2} + I_n \leq 2^n \int_1^{e^2} x dx = 2^{n-1} (e^4 - 1)$	2p