

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Variantă 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 8$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2} = 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 2.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$ și $B(6, 8)$. Arătați că $OA = AB$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 12$, $AC = 8$ și punctul M mijlocul laturii AB . Arătați că $CM = 10$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $A(3) + 2I_2 = A(5)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x) + xI_2) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2x + 2y - 1$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 1 = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x \circ (x+1) = 5$.
- 5p** c) Arătați că $x \circ x \leq 4x^2$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$ situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x-2}{2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 \frac{1}{f(x)} dx = 12$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^3 2xf(x) dx = \ln 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)} dx = e(ae - a + 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} =$ $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$	2p 3p
2.	$f(a) = 2a - 8$, pentru orice număr real a $2a - 8 = 0$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
3.	$3x - 2 = 1$, de unde obținem $3x = 3$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele, din mulțimea A , care au suma cifrelor egală cu 2 sunt 11 și 20, deci sunt 2 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	2p 3p
5.	$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, deci $OA = AB$	2p 3p
6.	$AM = 6$ $CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = 10$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 =$ $= 2 - 2 = 0$	3p 2p
b)	$A(3) + 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A(5)$	3p 2p
c)	$A(x) + xI_2 = \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & 2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$ și $\det(A(x) + xI_2) = 4x^2 - 2x - 2$, pentru orice număr real x $4x^2 - 2x - 2 = 0$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = -\frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$2 \circ 1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 =$ $= 4 + 2 - 1 = 5$	3p 2p
b)	$x \circ (x+1) = 2x + 2(x+1) - 1 = 4x + 1$, pentru orice număr real x $4x + 1 = 5$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p

c)	$x \circ x = 4x - 1$, pentru orice număr real x	2p
	$4x - 1 = -4x^2 + 4x - 1 + 4x^2 = -(2x - 1)^2 + 4x^2 \leq 4x^2$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - 2 \cdot (\ln x)' =$	2p
	$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p
b)	$f(1) = 1, f'(1) = -1$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -x + 2$	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2; f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 2]$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$	3p
	$f(2) = 2 - 2\ln 2$, deci $2 - 2\ln 2 \leq f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, de unde obținem $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x-2}{2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^3 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big _0^3 =$	3p
	$= \frac{27}{3} + 3 = 12$	2p
b)	$\int_2^3 2xf(x) dx = \int_2^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int_2^3 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big _2^3 =$	3p
	$= \ln 10 - \ln 5 = \ln 2$	2p
c)	$\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)} dx = \int_1^2 e^x (x^2 + 1) dx = e^x (x^2 + 1) \Big _1^2 - \int_1^2 2xe^x dx = 5e^2 - 2e - (2xe^x - 2e^x) \Big _1^2 = 3e^2 - 2e$	3p
	$e(3e - 2) = e(ae - a + 1)$, de unde obținem $a = 3$	2p