

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_2 = 8$ și $a_3 = 12$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) = m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(9 - x^2) = \log_6 5$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $\sqrt{2n+1}$ să aparțină mulțimii A .
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(4, 4)$ și $C(5, 2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în C .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = 2 \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{4} \right)^2$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(1)) = 7$.
- 5p** b) Arătați că $B(2) - B(0) \cdot B(1) = 4A$.
- 5p** c) Determinați numerele reale a pentru care matricea $C(a) = B(a) - aA$ **nu** este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 3y + 6$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 2 = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x * 6 = x$.
- 5p** c) Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $x * (2 * x) \geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + x + 4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $f(x) - f(4 - x) \leq 1$, pentru orice $x \in [4, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x+1) f(x) dx = 8$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 1 + 2 \ln 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2 - 1) e^x f(x) dx = e(e + a)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei este $r = a_3 - a_2 = 4$ $a_1 = a_2 - r = 4$	3p 2p
2.	$f(m) = 3m - 2$, pentru orice număr real m $3m - 2 = m$, de unde obținem $m = 1$	2p 3p
3.	$9 - x^2 = 5$, de unde obținem $x^2 - 4 = 0$ $x = -2$ sau $x = 2$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care $\sqrt{2n+1}$ aparține mulțimii A sunt 0 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	2p 3p
5.	$m_{AC} = \frac{1}{2}$ $m_{BC} = -2 \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în C	2p 3p
6.	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{4} = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) =$ $= 3 + 4 = 7$	3p 2p
b)	$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B(0) \cdot B(1) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ $B(2) - B(0) \cdot B(1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 4A$	3p 2p
c)	$C(a) = \begin{pmatrix} 0 & a+1 \\ a-3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C(a)) = -(a-3)(a+1)$, pentru orice număr real a $\det(C(a)) = 0$, de unde obținem $a = -1$ sau $a = 3$	3p 2p
2.a)	$2 * 2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 6 =$ $= 4 - 4 - 6 + 6 = 0$	3p 2p
b)	$x * 6 = 4x - 12$, pentru orice număr real x $4x - 12 = x$, de unde obținem $x = 4$	3p 2p
c)	$2 * x = 2 - x$, $x * (2 * x) = -x^2 + 3x$, pentru orice număr real x $-x^2 + 3x \geq 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 \geq 0$, de unde obținem $x \in [1, 2]$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x^2 + x + 4) - 2x(2x + 1)}{(x^2 + x + 4)^2} =$ $= \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + x + 4)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ sau $x = 2$; pentru orice $x \in (-\infty, -2]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$; pentru orice $x \in [-2, 2]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2, 2]$; pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[2, +\infty)$ $x \in [4, +\infty) \Rightarrow 4 - x \in (-\infty, 0]$, deci $f(x) \leq f(4)$ și $f(4 - x) \geq f(-2)$ și, cum $f(-2) = -\frac{2}{3}$ și $f(4) = \frac{1}{3}$, obținem $f(x) - f(4 - x) \leq 1$, pentru orice $x \in [4, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x+1)f(x)dx = \int_0^2 (x+3)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big _0^2 =$ $= 2 + 6 = 8$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x+3}{x+1}dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)dx = x\Big _0^1 + 2\ln(x+1)\Big _0^1 =$ $= 1 + 2\ln 2 - 2\ln 1 = 1 + 2\ln 2$	3p 2p
c)	$\int_1^2 (x^2 - 1)e^x f(x)dx = \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)e^x dx = (x^2 - 3)e^x\Big _1^2 = e^2 + 2e$ $e(e + a) = e^2 + 2e$, de unde obținem $a = 2$	3p 2p