

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică M_{st-nat}

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2 \cdot (1, 2 + 0, 1) + 0, 4 = 3$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) - f(2) = a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(x^2 - 5x + 5) = \log_8 x$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 3, 4, 6, 8\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 8)$, $B(4, 2)$ și C , mijlocul segmentului OA . Determinați coordonatele mijlocului segmentului BC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 8$ și $C = \frac{\pi}{4}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x-2 & x-2 \\ x-4 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(5)) = 12$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $(B(4) - B(2)) \cdot A = aA$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A \cdot B(x) - 4xI_2) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x(x - 2) + y(y - 2)$.
- 5p** a) Arătați că $3 \circ 3 = 6$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $2 \circ x = x^2 + 2$.
- 5p** c) Arătați că $x \circ y \geq -2$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (x^2 + 1) f(x) dx = 6$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^3 f(x) dx = 2 \ln 2$.

5p	c) Determinați $m \in (1, +\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^3 dx = 6$.
-----------	---

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 \cdot (1, 2 + 0, 1) + 0, 4 = 2 \cdot 1, 3 + 0, 4 =$ $= 2, 6 + 0, 4 = 3$	2p 3p
2.	$f(a) = 2a + 1, f(2) = 5$ $2a + 1 - 5 = a$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - 5x + 5 = x$, de unde obținem $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1$ sau $x = 5$, care convin	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 4 = 8$ numere	2p 3p
5.	$C(0, 4)$ Mijlocul segmentului BC are coordonatele $(2, 3)$	2p 3p
6.	$AC = 8$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(5) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(5)) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 =$ $= 15 - 3 = 12$	3p 2p
b)	$B(4) - B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, (B(4) - B(2)) \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4A$ $4A = aA$, de unde obținem $a = 4$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 4x - 14 & 4x - 2 \\ 4x - 14 & 4x - 2 \end{pmatrix}, A \cdot B(x) - 4xI_2 = \begin{pmatrix} -14 & 4x - 2 \\ 4x - 14 & -2 \end{pmatrix},$ de unde obținem $\det(A \cdot B(x) - 4xI_2) = -16x(x - 4)$, pentru orice număr real x $-16x(x - 4) = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 4$	3p 2p
2.a)	$3 \circ 3 = 3(3 - 2) + 3(3 - 2) =$ $= 3 + 3 = 6$	3p 2p
b)	$2 \circ x = x^2 - 2x$ și obținem $-2x = 2$ $x = -1$	3p 2p
c)	$x \circ y = x^2 - 2x + y^2 - 2y =$ $= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 \geq -2$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} =$ $= \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = -2, \quad f'(1) = 2$ Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = 2x - 4$	2p 3p
c)	$f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ este strict crescătoare pe } (0, +\infty), \text{ deci } f \text{ este}$ injectivă $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ și } f \text{ este continuă, deci } f \text{ este surjectivă, de unde obținem}$ că f este bijectivă	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_1^2 4x dx = 2x^2 \Big _1^2 =$ $= 8 - 2 = 6$	3p 2p
b)	$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{4x}{x^2 + 1} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = 2 \ln(x^2 + 1) \Big _2^3 =$ $= 2 \ln 10 - 2 \ln 5 = 2 \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^3 dx = \int_1^m \frac{64}{(x+1)^3} dx = -\frac{32}{(x+1)^2} \Big _1^m = -\frac{32}{(m+1)^2} + 8$ $-\frac{32}{(m+1)^2} + 8 = 6 \text{ și, cum } m \in (1, +\infty), \text{ obținem } m = 3$	3p 2p