

**Examenul național de bacalaureat 2024**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianța 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $2 - 5i + i(5 - 3i) = 5$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(2) = 15$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{2x+1} = 7^x \cdot 7^2$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin una dintre cifre egală cu 1.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,5)$  și  $B(4,2)$ . Determinați distanța dintre punctul  $A$  și mijlocul segmentului  $OB$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 5$  și  $BC = 5\sqrt{5}$ . Arătați că  $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x & x-3 \\ 3-x & x-4 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = 1$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $B(4) \cdot B(4) + I_2 = aB(4)$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x + y)(4 - x - y)$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 3 = 3$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * 1 = 0$ .
- 5p** c) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care numărul  $N = (n + 5) * (n - 5)$  este natural.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x - 2 \ln(x + 1)$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Arătați că  $x^2 - x \geq 2 \ln \frac{x+1}{2}$ , pentru orice  $x \in (-1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^3 (f(x) - 3x) dx = 12$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^2)^2} dx = \frac{1}{4}$ .
- 5p** c) Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x) - x^2 - 1}{e^x}$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$  este egală cu  $3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$ .

**Examenul național de bacalaureat 2024**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianța 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |          |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $2 - 5i + i(5 - 3i) = 2 - 5i + 5i - 3i^2 =$<br>$= 2 + 3 = 5$                                                                                                                                                                                                                                     | 3p<br>2p |
| 2. | $f(2) = 12 + m$ , deci $12 + m = 15$<br>$m = 3$                                                                                                                                                                                                                                                  | 3p<br>2p |
| 3. | $7^{2x+1} = 7^{x+2}$ , de unde obținem $2x+1 = x+2$<br>$x = 1$                                                                                                                                                                                                                                   | 3p<br>2p |
| 4. | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile<br>În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 18 numere care au cel puțin una dintre cifre<br>egală cu 1, deci sunt 18 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$ | 2p<br>3p |
| 5. | $M(2,1)$ este mijlocul segmentului $OB$<br>$AM = 4$                                                                                                                                                                                                                                              | 3p<br>2p |
| 6. | $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{5}} =$<br>$= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$                                                                                                                                                                                                  | 3p<br>2p |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |          |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 =$<br>$= 0 + 1 = 1$                                                                                                                                                                                                             | 3p<br>2p |
| b)   | $B(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , $B(4) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$<br>$B(4) \cdot B(4) + I_2 = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 4B(4)$ , deci $4B(4) = aB(4)$ , de unde obținem $a = 4$                                                  | 3p<br>2p |
| c)   | $A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 3x-3 & x-2 \\ x & x-3 \end{pmatrix}$ , $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 3x-3 & -x \\ -x+2 & x-3 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$<br>Cum $\begin{pmatrix} 3x-3 & x-2 \\ x & x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-3 & -x \\ -x+2 & x-3 \end{pmatrix}$ , obținem $x = 1$ | 3p<br>2p |
| 2.a) | $0 * 3 = (0+3)(4-0-3) =$<br>$= 3 \cdot 1 = 3$                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3p<br>2p |
| b)   | $x * 1 = (x+1)(3-x)$ , pentru orice număr real $x$<br>$(x+1)(3-x) = 0$ , de unde obținem $x = -1$ sau $x = 3$                                                                                                                                                                                                      | 2p<br>3p |

|           |                                                                                                                                             |                        |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>c)</b> | $(n+5) * (n-5) = 4n(2-n)$ , pentru orice număr natural $n$<br>Cum $n$ și $N = 4n(2-n)$ sunt numere naturale, obținem $n=0$ , $n=1$ și $n=2$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                        |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x+1} =$<br>$= \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - 2}{x+1} = \frac{2x^2 + x - 3}{x+1}, x \in (-1, +\infty)$                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $f(0) = 0, f'(0) = -3$<br>Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = -3x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ; pentru orice $x \in (-1, 1]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(-1, 1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$<br>Pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ , $f(x) \geq f(1)$ și, cum $f(1) = -2 \ln 2$ , obținem $x^2 - x \geq 2 \ln \frac{x+1}{2}$ , pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_0^3 (f(x) - 3x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$<br>$= \frac{27}{3} + 3 = 12$                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(3x+1)'}{(3x+1)^2} dx = -\frac{1}{3(3x+1)} \Big _0^1 =$<br>$= -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$                                                                                                                                                                                        | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $g(x) = 3xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$ , deci $\mathcal{A} = \int_0^1  g(x)  dx = \int_0^1 3x(-e^{-x})' dx =$<br>$= -3e^{-x}(x+1) \Big _0^1 = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$                                                                                                                                                                                                                           | <b>2p</b><br><b>3p</b> |