

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$. Arătați că $f(0) - f(1) = 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x - 8} = 1$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $2n \geq 9$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(1,2)$ și $C(4,1)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu aria egală cu 50 și $AC = 5$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu 20.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -x & 2-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că $3A(2) + A(6) = 4A(3)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) = 2A(x)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + 2x - y - 1$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x * 2 = x$.
- 5p** c) Arătați că $(1 - x) * x \leq 2$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{2}{e^x} - 1$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(e^x - 1)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați numerele reale m și n , știind că dreapta d de ecuație $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = 15$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \frac{1}{3} \ln 2$.
- 5p** c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x}$ este egal cu $2\pi f(3)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 1,5 + 3 \cdot 0,5 =$ $= 1,5 + 1,5 = 3$	3p 2p
2.	$f(0) = 5$ $f(1) = 4$, deci $f(0) - f(1) = 5 - 4 = 1$	2p 3p
3.	$3x - 8 = 1$ $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele n , din mulțimea A , pentru care $2n \geq 9$ sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{5}$	2p 3p
5.	$AC = \sqrt{10}$ $BC = \sqrt{10}$, deci triunghiul ABC este isoscel	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 50 = \frac{AB \cdot 5}{2}$ $AB = \frac{2 \cdot 50}{5} = 20$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) =$ $= 1 + 1 = 2$	3p 2p
b)	$3A(2) + A(6) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} =$ $= 4 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 4A(3)$	3p 2p
c)	$A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x^2 - x & 2 \\ -2x & x^2 - 5x + 4 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} x^2 - x & 2 \\ -2x & x^2 - 5x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -2x & 4 - 2x \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 3$	2p 3p
2.a)	$1 * 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 - 1 =$ $= 1 + 2 - 1 - 1 = 1$	3p 2p
b)	$x * 2 = 4x - 3$, pentru orice număr real x $4x - 3 = x$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p

c)	$(1-x) * x = -x^2 - 2x - 1 + 2 =$	3p
	$= -(x+1)^2 + 2 \leq 2$, pentru orice număr real x	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - 2e^{-x} = 2 - \frac{2}{e^x} =$	3p
	$= \frac{2e^x - 2}{e^x} = \frac{2(e^x - 1)}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = 1, f'(0) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 1$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{2}{e^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{xe^x} - \frac{1}{x} \right) = 2$, deci $m = 2$	3p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x} - 1 \right) = -1$, deci $n = -1$	2p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = \int_1^2 4x^3 dx = x^4 \Big _1^2 =$	3p
	$= 16 - 1 = 15$	2p
b)	$\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln(x+1) \Big _2^5 =$	3p
	$= \frac{1}{3} (\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{3} \ln 2$	2p
c)	$g(x) = 5x^2 + 3, x \in [1, 2]$, deci $\mathcal{V} = \pi \int_1^2 (25x^4 + 30x^2 + 9) dx = \pi (5x^5 + 10x^3 + 9x) \Big _1^2 = 234\pi$	3p
	$f(3) = 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 = 117$, deci $\mathcal{V} = 2\pi f(3)$	2p