

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$. Arătați că $f(0) \cdot f(1) = 10$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3} = 3^x$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2 \leq 23$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 3)$ și $B(4, 0)$. Arătați că perimetrul triunghiului OAB este egal cu 12.
- 5p** 6. Arătați că $(1 + 2\cos 60^\circ) \cdot \sin 30^\circ = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 3$.
- 5p** b) Arătați că $B(8) - 3B(2) = 2A$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 3$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2x_3 = 1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \frac{2}{3}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = 2 \ln 3$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} =$ $= \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$	3p 2p
2.	$f(0) = 2$ $f(1) = 5 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = 2 \cdot 5 = 10$	2p 3p
3.	$2x - 3 = x$ $x = 3$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care $n^2 \leq 23$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 3p
5.	$OA = 3$, $OB = 4$ $AB = 5$, deci $P_{\Delta OAB} = 3 + 4 + 5 = 12$	2p 3p
6.	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $(1 + 2 \cos 60^\circ) \cdot \sin 30^\circ = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 =$ $= 3 - 0 = 3$	3p 2p
b)	$B(8) - 3B(2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2A$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x-3 & 3x-6 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} x & 0 \\ x-3 & 3x-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 2$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 - 2X^2 - 2X + 3 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 =$ $= 1 - 2 - 2 + 3 = 0$	3p 2p

b)	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2$ și $x_1x_2x_3 = -m \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2x_3 = -2 - m$ $-2 - m = 1$, de unde obținem $m = -3$	3p 2p
c)	$f(-2) = m - 12$, pentru orice număr real m $m - 12 = 0$, de unde obținem $m = 12$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -1]$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} = \frac{2}{3}$	3p 2p
b)	$\int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = \int_0^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} dx = \ln(2x^2 + 1) \Big _0^2 =$ $= \ln 9 - \ln 1 = 2 \ln 3$	3p 2p
c)	$\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(-\frac{2}{x} + x\right)' \cdot \ln x dx = \left(-\frac{2}{x} + x\right) \cdot \ln x \Big _1^e - \int_1^e \left(-\frac{2}{x} + x\right) dx = 3 - \frac{4}{e}$ $3 - \frac{4}{e} = 2n^2 + 1 - \frac{4}{e} \text{ și, cum } n \text{ este număr natural, obținem } n = 1$	3p 2p