

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x - 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x + 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = g(a)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(3, 3)$  și  $M$ , mijlocul segmentului  $AB$ . Arătați că segmentele  $MO$  și  $MC$  au lungimile egale.
- 5p** 6. Se consideră  $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$ , pentru orice număr real  $a$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 \circ 2 = 12$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(2x) \circ x = -1$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere întregi, cu  $m < n$ , pentru care  $m \circ n = 3$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $|f(x) - f(y)| \leq 1$ , pentru orice  $x, y \in [1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$ , pentru orice primitivă  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ .

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                     |          |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3 =$<br>$= 4 - 3 = 1$                                                                                                                                               | 3p<br>2p |
| 2. | $5a - 3 = 2a + 3$<br>$a = 2$                                                                                                                                                                                                        | 3p<br>2p |
| 3. | $2^{2x+4} = 2^0$ , de unde obținem $2x + 4 = 0$<br>$x = -2$                                                                                                                                                                         | 3p<br>2p |
| 4. | Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri<br>Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4 \cdot 3 = 12$ numere                                                            | 2p<br>3p |
| 5. | $M(2,1)$ , de unde obținem $MO = \sqrt{5}$<br>$MC = \sqrt{5}$ , deci $MO = MC$                                                                                                                                                      | 3p<br>2p |
| 6. | $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$<br>$E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ | 3p<br>2p |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                      |          |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 =$<br>$= 3 - 2 = 1$                                                                               | 3p<br>2p |
| b)   | $A(a) - A(0) = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}$<br>$A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI_2$ , pentru orice număr real $a$                  | 2p<br>3p |
| c)   | $A(a^2) = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 2-2a^2 \\ 1-a^2 & 1+3a^2 \end{pmatrix}$ , $A(a^2) - aA(a) = \begin{pmatrix} 3-3a & 2-2a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$<br>$\det(A(a^2) - aA(a)) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^2 = (1-a)^2 \geq 0$ , pentru orice număr real $a$ | 2p<br>3p |
| 2.a) | $0 \circ 2 = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 =$<br>$= 0 - 0 + 12 = 12$                                                                                                                                                                         | 3p<br>2p |
| b)   | $(2x) \circ x = -x^2$ , pentru orice număr real $x$<br>$-x^2 = -1$ , de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$                                                                                                                                            | 2p<br>3p |

|           |                                                                                                                |           |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>c)</b> | $m \circ n = m^2 - mn - 3mn + 3n^2 = (m-n)(m-3n)$ , pentru orice numere întregi $m$ și $n$                     | <b>2p</b> |
|           | $(m-n)(m-3n) = 3$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere întregi cu $m < n$ , obținem perechile $(-4, -1)$ și $(0, 1)$ | <b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                       |           |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = \frac{4x^2 - (4x-4) \cdot 2x}{x^4} =$                                                                                                                                                                                        | <b>3p</b> |
|             | $= \frac{4x(2-x)}{x^4} = \frac{4(2-x)}{x^3}, x \in (0, +\infty)$                                                                                                                                                                      | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{4x-4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 5$                                              | <b>3p</b> |
|             | Dreapta de ecuație $y = 5$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$                                                                                                                                          | <b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ; pentru orice $x \in [1, 2]$ , $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ și pentru orice $x \in [2, +\infty)$ , $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2, +\infty)$ | <b>2p</b> |
|             | $f(1) = 5$ , $f(2) = 6$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ , deci $5 \leq f(x) \leq 6$ , pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , de unde obținem $ f(x) - f(y)  \leq 1$ , pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$                    | <b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$                                                                                                                                                                   | <b>3p</b> |
|             | $= 8 - 1 = 7$                                                                                                                                                                                                                         | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = \int_1^e 4x \ln x dx = \int_1^e (2x^2)' \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - x^2 \Big _1^e =$                                                                                                              | <b>3p</b> |
|             | $= 2e^2 - 0 - e^2 + 1 = e^2 + 1$                                                                                                                                                                                                      | <b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x), x \in (0, +\infty)$                                                                                                                                                                         | <b>2p</b> |
|             | $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big _1^{\sqrt{e}} = \frac{(3e+2)^2 - 3^2}{2} = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$                                                                        | <b>3p</b> |