

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2-i)^2 + i(4+i) = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f \circ f)(m) = 2m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 10$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 4 \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax - y + 2az = 0 \\ x - 2y + az = 0 \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = -1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 4(x+y)^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = -3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-1) \leq 2x$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{5} - \ln(x^2 + x + 5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 9x}{5(x^2 + x + 5)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x^3 + 8}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = 8$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_1^4 x f(x) dx = 4 \ln 2$.
- 5p** | **c)** Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(2-i)^2 + i(4+i) = 4 - 4i + i^2 + 4i + i^2 = 4 - 1 - 1 = 2$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(m) = m + 6$, pentru orice număr real m $m + 6 = 2m$, de unde obținem $m = 6$	3p 2p
3.	$5 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x = 10$, deci $2 \cdot 5^x = 10$, de unde obținem $5^x = 5$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Deoarece cifrele pot fi 7, 8 și 9, sunt $3 \cdot 3 = 9$ numere naturale de două cifre care au cifrele mai mari sau egale cu 7, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = -2$ $m_{OC} = \frac{1}{2}$, pentru orice număr real nenul a și, cum $m_{AB} \cdot m_{OC} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$, obținem că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a	2p 3p
6.	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (a+1)^2$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2p 3p
c)	Pentru $a = -1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3\alpha^2$, deci $3\alpha^2 = 3$, de unde obținem $\alpha = -1$ sau $\alpha = 1$, deci soluțiile sunt $(1, 1, -1)$ și $(-1, -1, 1)$	2p 3p

2.a)	$0 * 1 = 0^2 \cdot 1^2 - 4(0+1)^2 + 1 =$ $= 0 - 4 + 1 = -3$	3p 2p
b)	$x * (-1) = -3x^2 + 8x - 3 =$ $= -3x^2 + 6x - 3 + 2x = -3(x-1)^2 + 2x \leq 2x$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$m^2 n^2 - 4(m+n)^2 + 1 = 1$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $mn - 2m - 2n = 0$ $(m-2)(n-2) = 4$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m \leq n$, perechile sunt $(3,6)$ și $(4,4)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{2x+1}{x^2+x+5} =$ $= \frac{x^2+x+5-10x-5}{5(x^2+x+5)} = \frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$ $a^2 - 9a = 0$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 9$	3p 2p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, 9] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, 9]$, deci $f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in (-\infty, 9]$ $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (9, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(9, +\infty)$ și, cum $f(0) = -\ln 5 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = \int_0^2 4x dx = 2x^2 \Big _0^2 =$ $= 8 - 0 = 8$	3p 2p
b)	$\int_1^4 x f(x) dx = \int_1^4 \frac{4x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{4}{3} \int_1^4 \frac{(x^3 + 8)'}{x^3 + 8} dx = \frac{4}{3} \cdot \ln(x^3 + 8) \Big _1^4 =$ $= \frac{4}{3} \ln 8 = 4 \ln 2$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x t \cdot f(t) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{3x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3(x^3 + 8)} = \frac{1}{6}$	3p 2p