

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_1 = 3$ și $a_5 = 23$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(m, -1)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul submulțimilor nevide ale mulțimii A , care au cel mult două elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$ și $B(4, 4)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{OA} = \overline{BC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 6$ și înălțimea $AD = 3$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) - A(xy) = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(y)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 3$.
- 5p** b) Pentru $m = 0$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3e^x}{x^2 + x + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3e^x(x^2 - x)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții, pentru orice $m \in (e, 3)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \ln(x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln(x + 1)) dx = 9$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^{e-1} \frac{f(x) - 6x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** | **c)** Determinați numărul real a , știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este egală cu $a\pi + \ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$4r = a_5 - a_1 = 20$, deci $r = 5$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_6 = a_5 + r \Rightarrow a_6 = 28$	3p 2p
2.	$f(m) = -1$, de unde obținem $m^2 - 6m + 9 = 0$ $m = 3$	3p 2p
3.	$3^{2x-1} = 3^{x+3}$, de unde obținem $2x - 1 = x + 3$ $x = 4$	3p 2p
4.	$C_5^1 + C_5^2 =$ $= 5 + 10 = 15$	3p 2p
5.	$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = (x_C - 4)\vec{i} + (y_C - 4)\vec{j}$ $x_C = 7$ și $y_C = 5$	3p 2p
6.	Triunghiul ADB este dreptunghic în D , deci $BD = 3\sqrt{3}$ $BC = 4\sqrt{3}$, deci $R = 2\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) - A(xy) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y+x-2 & 0 & y+x-2 \\ -y-x+2 & 0 & -y-x+2 \end{pmatrix} =$ $= (y+x-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (x+y-2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(-3) \cdot A(x) = A(-3x) + (x-5)A(0)$, pentru orice număr real x $A(-3x) + (x-5)A(0) = A(y)$, de unde obținem $x = 5$ și $y = -15$	2p 3p
2.a)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 6X + 2 \Rightarrow f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 =$ $= 1 + 2 - 8 + 6 + 2 = 3$	3p 2p
b)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 = X^2(X^2 + 2X - 8)$ Rădăcinile polinomului f sunt $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -4$, $x_4 = 2$	2p 3p
c)	Polinomul f are coeficienți raționali, deci $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului f $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -8$, unde x_3 și x_4 sunt celelalte rădăcini ale polinomului f , de unde obținem $x_3 + x_4 = -4$ și $x_3x_4 = 2$ și, cum $x_1x_2x_3x_4 = m$, rezultă $m = -4$, care convine	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{3e^x(x^2 + x + 1) - 3e^x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} =$ $= \frac{3e^x(x^2 + x + 1 - 2x - 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{3e^x(x^2 - x)}{(x^2 + x + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x}}{4x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{3e^x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \cdot \frac{x^2 + x + 1}{4x^2 + 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$; pentru orice $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 1)$; pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 3$, $f(1) = e$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și, cum f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții, pentru orice $m \in (e, 3)$	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - \ln(x+1)) dx = \int_1^2 6x dx = 3x^2 \Big _1^2 =$ $= 12 - 3 = 9$	3p 2p
b)	$\int_0^{e-1} \frac{f(x) - 6x}{x+1} dx = \int_0^{e-1} \ln(x+1) (\ln(x+1))' dx = \frac{\ln^2(x+1)}{2} \Big _0^{e-1} =$ $= \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$g(x) = 6x^2 + \ln(x^2 + 1) \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^1 g(x) dx = 2x^3 \Big _0^1 + \int_0^1 x' \ln(x^2 + 1) dx = 2 + \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx =$ $= 2 + \ln 2 - 2x \Big _0^1 + 2 \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{2} + \ln 2, \text{ deci } \frac{\pi}{2} + \ln 2 = a\pi + \ln 2, \text{ de unde obținem } a = \frac{1}{2}$	3p 2p