

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})+3(1-2\sqrt{2})=7$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x-10$. Determinați numărul real a pentru care $f(2a)=f(a)-3$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x^2-6x+5}=x\sqrt{3}$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel mult egală cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(1,5)$ și $C(6,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în A .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x)=\cos x\cdot\sin 3x-\sin 2x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 2x+1 & 0 \\ 4x & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1))=6$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=A(x)$.
- 5p** c) Demonstrați că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x .
- 5p** 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-xy-x+2y+1$.
- 5p** a) Arătați că $1\circ 1=2$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x\circ(2x)=1$.
- 5p** c) Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x)=\frac{3x^2-x-2}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{5x-5}=\frac{1}{2}$.
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{5}{6}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=e(2e-1)$.

5p	c) Determinați numărul real a pentru care $\int_2^4 \frac{xf(x)}{f(x-1)} dx = ae(5 + \ln 3)$.
-----------	--

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})+3(1-2\sqrt{2})=6\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+3-6\sqrt{2}=$ $=4+3=7$	2p 3p
2.	$f(2a)=6a-10$, $f(a)=3a-10$, pentru orice număr real a $6a-10=3a-10-3$, de unde obținem $a=-1$	2p 3p
3.	$4x^2-6x+5=3x^2$, de unde obținem $x^2-6x+5=0$ $x=1$ sau $x=5$, care convin	2p 3p
4.	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care au suma cifrelor cel mult egală cu 3, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	2p 3p
5.	$m_{AB}=2$ $m_{AC}=-\frac{1}{2}$ și, cum $m_{AB}\cdot m_{AC}=-1$, obținem că triunghiul ABC este dreptunghic în A	2p 3p
6.	$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-0\cdot 4=$ $=6-0=6$	3p 2p
b)	$A(-2)=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -28 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -28 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-7)+1 & 0 \\ 4\cdot(-7) & -7+1 \end{pmatrix}=A(-7)$, deci $A(x)=A(-7)$, de unde obținem $x=-7$	2p 3p
c)	$A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2=\begin{pmatrix} 2x+\frac{2}{x} & 0 \\ 4x+\frac{4}{x} & x+\frac{1}{x} \end{pmatrix}$, $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)=\left(2x+\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=$ $=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)=2\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x	2p 3p
2.a)	$1\circ 1=1^2-1\cdot 1-1+2\cdot 1+1=$ $=1-1-1+2+1=2$	3p 2p

b)	$x \circ (2x) = -x^2 + 3x + 1$, pentru orice număr real x	2p
	$-x^2 + 3x + 1 = 1$, deci $-x^2 + 3x = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 3$	3p
c)	$m \circ n = m^2 - mn - m + 2n + 1$, deci $m^2 - mn - 2m + 2n = -1$	2p
	$(m-2)(m-n) = -1$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(1,0)$ și $(3,4)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \sqrt{x} + (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$	3p
	$= \frac{2x^2 + x^2 - x - 2}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 - x - 2}{2x\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \cdot f'(x)}{5x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x(5x-5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+2)(x-1)}{10x(x-1)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{10x} = \frac{1}{2}$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (0,1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$ și f este continuă, de unde obținem că imaginea funcției f este $[2, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + \frac{x^2}{2} \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$	2p
b)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^2 (x+1)(e^x)' dx = xe^x \Big _1^2 =$	3p
	$= 2e^2 - e = e(2e-1)$	2p
c)	$\int_2^4 \frac{xf(x)}{f(x-1)} dx = e \int_2^4 \frac{x^2 + x}{x-1} dx = e \int_2^4 \left(x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx = e \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln(x-1) \right) \Big _2^4 = 2e(5 + \ln 3)$	3p
	$ae(5 + \ln 3) = 2e(5 + \ln 3)$, de unde obținem $a = 2$	2p