

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 3$ și $a_2 = 9$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$. Arătați că $f(3) + f(2) + f(0) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{9x - 5} = 2$.
- 5p** 4. După o ieftinire cu 30%, un obiect costă 56 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(5,6)$ și $C(7,2)$. Arătați că $AB = AC$.
- 5p** 6. Arătați că $(\sin 30^\circ + 3 \cos 60^\circ) \cdot (\sin 45^\circ)^2 = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 5$.
- 5p** b) Arătați că $A + 3I_2 = 2B(1)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(2x) - B(x) \cdot A) = x^2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 8x - 8y + 8$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x * 2 = 2x$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m < n$, pentru care $(8 + m) * (8 + n) = 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+7}{x+4}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{9}{(x+4)^2}$, $x \in (-4, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați $a \in (-4, +\infty)$, știind că panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este egală cu 1.
2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \sqrt{x+3}) dx = 3$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{f(x) - 2x} dx = 2$.
- 5p** c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x) - 2x}$, în jurul axei Ox este egal cu $9\pi \ln 3$.

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

**Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_2 - a_1 = 6$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_3 = a_2 + r = 15$	3p 2p
2.	$f(3) = 4$, $f(2) = 1$, $f(0) = -5$ $f(3) + f(2) + f(0) = 4 + 1 - 5 = 0$	3p 2p
3.	$9x - 5 = 4$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	$x - \frac{30}{100} \cdot x = 56$, unde x este prețul înainte de ieftinire $x = 80$ de lei	3p 2p
5.	$AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ $AC = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$, deci $AB = AC$	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ) \cdot (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) =$ $= 1 + 4 = 5$	3p 2p
b)	$A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2B(1)$	3p 2p
c)	$B(2x) = \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ -1 & 4x \end{pmatrix}$, $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 2-2x & 4+x \\ -1-4x & -2+2x \end{pmatrix}$, $B(2x) - B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 2x & x-4 \\ 4x & 2x+2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(B(2x) - B(x) \cdot A) = 20x$, pentru orice număr real x $20x = x^2$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 20$	3p 2p
2.a)	$0 \cdot 1 = 0 \cdot 1 - 8 \cdot 0 - 8 \cdot 1 + 8 =$ $= 0 - 0 - 8 + 8 = 0$	3p 2p
b)	$x \cdot 2 = -6x - 8$, pentru orice număr real x $-6x - 8 = 2x$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p

c)	$(8+m) \cdot (8+n) = mn - 56$, pentru orice numere naturale m și n	2p
	$mn - 56 = 2 \Leftrightarrow mn = 58$ și, cum m și n sunt numere naturale, cu $m < n$, obținem perechile $(1, 58)$ și $(2, 29)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{4(x+4) - (4x+7)}{(x+4)^2} =$	3p
	$= \frac{4x+16-4x-7}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2}, x \in (-4, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+7}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = 4$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 4$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(a) = 1$	2p
	$\frac{9}{(a+4)^2} = 1$, deci $(a+4)^2 = 9$ și, cum $a \in (-4, +\infty)$, obținem $a = -1$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - \sqrt{x+3}) dx = \int_1^2 2x dx = x^2 \Big _1^2 =$	3p
	$= 4 - 1 = 3$	2p
b)	$\int_1^6 \frac{1}{f(x) - 2x} dx = \int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = 2 \int_1^6 \frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} \Big _1^6 =$	3p
	$= 6 - 4 = 2$	2p
c)	$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}, x \in [0, 6]$, deci $V = \pi \int_0^6 (g(x))^2 dx = \pi \int_0^6 \frac{x^2}{x+3} dx =$	2p
	$= \pi \int_0^6 \left(x - 3 + \frac{9}{x+3} \right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} \Big _0^6 - 3x \Big _0^6 + 9 \ln(x+3) \Big _0^6 \right) = 9\pi \ln 3$	3p