

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - i$ și $z_2 = 2 + i$. Arătați că $2z_1 + iz_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f)(a) = 9$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizor al numărului 2^6 .
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(5,0)$, $C(6,3)$ și $D(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că segmentele AC și BD au același mijloc.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 2$ și $\operatorname{tg} B = 3$. Arătați că $BC = 2\sqrt{10}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-3x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ -9x & 0 & 2+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 8$.
- 5p** b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = 2A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2)$.
2. Se consideră polinomul $f = aX^3 + 3X^2 - aX - 6$, unde a este număr real nenul.
- 5p** a) Arătați că $f(1) = -3$, pentru orice număr real nenul a .
- 5p** b) Pentru $a = 1$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + 3X - 1$.
- 5p** c) Determinați numărul real nenul a pentru care $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln \frac{x}{x+2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x)(x+1)^3 dx = 9$.

- | | |
|-----------|--|
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 \sqrt{f(x)(x+1)} dx = 1 - \ln 2$. |
| 5p | c) Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ este egală cu $\frac{e-1}{2(e+1)}$. |

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2z_1 + iz_2 = 2(1-i) + i(2+i) = 2 - 2i + 2i + i^2 = 2 - 1 = 1$	2p 3p
2.	$f(a) = a + 3$, $(f \circ f)(a) = a + 6$, pentru orice număr real a $a + 6 = 9$, de unde obținem $a = 3$	3p 2p
3.	$2x^2 - 3x + 2 = x^2$, de unde obținem $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 3 divizori ai numărului 2^6 , deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 3p
5.	Mijlocul segmentului AC are coordonatele $(3,2)$ și mijlocul segmentului BD are coordonatele $\left(\frac{5+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ $a = 1$ și $b = 4$	3p 2p
6.	$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$, de unde obținem $AC = 6$ $BC^2 = 2^2 + 6^2$, de unde obținem $BC = 2\sqrt{10}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ $= -10 + 0 + 0 + 18 - 0 - 0 = 8$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 4-6x-6y & 0 & 2x+2y \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x-18y & 0 & 4+6x+6y \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2-3(x+y) & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ -9(x+y) & 0 & 2+3(x+y) \end{pmatrix} = 2A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(x) + A(3x) = 2A(2x)$, $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(4x)$, pentru orice număr real x $4A(4x) = 4A(x^2)$, de unde obținem $4x = x^2$, deci $x = 0$ sau $x = 4$	3p 2p

2.a)	$f(1) = a \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - 6 =$	3p
	$= a + 3 - a - 6 = -3$, pentru orice număr real nenul a	2p
b)	$f = X(X^2 + 3X - 1) - 6$ și câtul împărțirii este X	3p
	Restul este -6	2p
c)	$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = -\frac{f(-1)}{a}$, pentru orice număr real nenul a	3p
	$-\frac{f(-1)}{a} = 1$, de unde obținem $a = 3$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 + \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = 2 + \frac{2}{x(x+2)} =$	3p
	$= \frac{2x^2 + 4x + 2}{x(x+2)} = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \ln \frac{x}{x+2} \right) = 2$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x+2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci f este injectivă	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	3p
2.a)	$\int_0^3 f(x)(x+1)^3 dx = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^3 =$	3p
	$= 9 - 0 = 9$	2p
b)	$\int_0^1 \sqrt{f(x)(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x \Big _0^1 - \ln(x+1) \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 - 0 - \ln 2 + \ln 1 = 1 - \ln 2$	2p
c)	$g(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} dx = \int_{-1}^1 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^3} dx = -\frac{1}{2(e^x + 1)^2} \Big _{-1}^1 =$	3p
	$= \frac{e^2 - 1}{2(e+1)^2} = \frac{e-1}{2(e+1)}$	2p