

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_2 = 14$ și $a_3 = 18$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Arătați că $(f \circ f)(5) = 9$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2, 1)$. Determinați coordonatele punctului B pentru care $\overline{AB} = 2\overline{OA}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $BC = 12$ și $AB = \frac{BC}{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(1)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $B(x) \cdot B(y) - B(x+y) = xyA$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x+1) - B(2x) \cdot B(1) = xA$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + 2 - a$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(1) = 4$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Pentru $a = 2$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 6x^2) dx = \frac{12}{5}$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Arătați că $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1} dx = \frac{\ln 6}{2}$. |
| 5p | c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right) = 6$. |

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 14 = \frac{a_1 + 18}{2}$ $a_1 = 10$	3p 2p
2.	$f(5) = 7$ $(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(7) = 9$	2p 3p
3.	$x^2 + 2x + 1 = 1 - x$, de unde obținem $x^2 + 3x = 0$ $x = -3$ sau $x = 0$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 4 = 16$ numere	2p 3p
5.	$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = (x_B - 2)\vec{i} + (y_B - 1)\vec{j}$, unde $B(x_B, y_B)$ $(x_B - 2)\vec{i} + (y_B - 1)\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, de unde obținem $x_B = 6$ și $y_B = 3$	3p 2p
6.	$AB = 6$, $AC = 6\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 2 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 = 0$	2p 3p
b)	$B(x) \cdot B(y) - B(x+y) = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1+xy & y+x \\ 0 & x+y & xy+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = xyA$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$B(x) \cdot B(x+1) = B(2x+1) + (x^2 + x)A$, $B(2x) \cdot B(1) = B(2x+1) + 2xA$, de unde obținem $B(x) \cdot B(x+1) - B(2x) \cdot B(1) = (x^2 - x)A$, pentru orice număr real x $(x^2 - x)A = xA$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
2.a)	$f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + 2 - a =$ $= 1 + a + 1 + 2 - a = 4$, pentru orice număr real a	3p 2p

b)	$f = X^3 + 2X^2 + X = X(X^2 + 2X + 1)$	2p
	Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 0$	3p
c)	$x_1 x_2 x_3 = -2 + a$, $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = x_1 x_2 x_3 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = (-2 + a)f(1)$	3p
	$4(-2 + a) = 4$, de unde obținem $a = 3$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^2 - 2)'e^{2x} + (x^2 - 2)(e^{2x})' =$ $= 2xe^{2x} + (x^2 - 2) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2), x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{2(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{2x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, -2]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -2]$; pentru orice $x \in [-2, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-2, 1]$ și pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$ Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = -e^2$ și f este continuă, imaginea funcției f este $[-e^2, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - 6x^2) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x \right) \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1 = \frac{12}{5}$	3p 2p
b)	$\int_1^6 \frac{x^3}{f(x) - 1} dx = \int_1^6 \frac{x}{x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \int_1^6 \frac{(x^2 + 6)'}{x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6) \Big _1^6 =$ $= \frac{\ln 42}{2} - \frac{\ln 7}{2} = \frac{\ln 6}{2}$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{3x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^4 + 18x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 6) = 6$	3p 2p